ESTATÍSTICA I - 2º Ano Economia, Exame Época normal 02. 06. 2020

1hora. (cotação 14 valores)

Questões de resposta aberta

Nome:____Número:_____

Espaço reservado para classificações

1. (10)	2a. (5)	2c. (10)	3a. (10)	5a. (15)	7. (15)
	2b. (10)	2d. (10)	3b. (10)	5b. (15)	
			4. (15)	6. (15)	

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Sejam os acontecimentos $A: X < \frac{\sigma}{2} + \mu$ e $B: X > \frac{3\sigma}{2} + \mu$. Calcule a $P(A \cup B)$.

   Como os acontecimentos A e B tem intersecção vazia, isto é, são incompatíveis tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P\left(X < \frac{\sigma}{2} + \mu\right) + P\left(X > \frac{3\sigma}{2} + \mu\right)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{3}{2}\right) = P\left(Z < \frac{1}{2}\right) + P\left(Z > \frac{3}{2}\right)$$

$$= \text{normcdf}\left(-99999, \tfrac{1}{2}, 0{,}1\right) + \text{normcdf}\left(\tfrac{3}{2}, 99999{,}0{,}1\right)$$

$$= 0.691462 + 0.066807 = 0.75827$$

2. Sejam X, Y v.a.(s) independentes com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$.

   a. Determine a função probabilidade conjunta do vector aleatório (X, Y)
   b. Determine a $P\left(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{4}\right)$.
   c. Determine a $P(X < Y)$
   d. Calcule o $E\left(X | Y = \frac{1}{2}\right)$

$X \sim U(0,1) \Rightarrow f_X(x) = 1 \quad 0 < x < 1; \quad Y \sim U(0,1) \Rightarrow f_Y(y) = 1 \quad 0 < y < 1$

a)

$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) * f_Y(y) = 1 \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ por que X, Y v.a.(s) independentes

$b)\ P\left(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/2} \int_{1/4}^{1} f_{X,Y}(x,y)\, dydx = \int_0^{1/2} \int_{1/4}^{1} 1\, dydx = \frac{3}{8}$

c) $P(X < Y) = \int_0^1 \int_0^x f_{X,Y}(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^x 1\, dydx = \frac{1}{2}$

d) $E\left(X | Y = \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x * f_{X|y=\frac{1}{2}}(x)dx = \int_0^1 x * \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx = \int_0^1 x * 1dx = \frac{1}{2}$

3. Uma fábrica tem uma máquina de enchimento rápido de embalagens tetra pack para sumo de laranja. A quantidade, em ml, de líquido vertido por embalagem, numa máquina de encher embalagens de sumo, tem distribuição normal com desvio padrão de 0.08. A máquina considera-se calibrada se a quantidade média de líquido vertido por embalagem, na amostra, diferir da média da população por valores inferiores a 0.05 ml.

a) Foi selecionada uma amostra de 25 embalagens e o seu conteúdo medido e registado. Determine a probabilidade de a máquina estar calibrada.

$X -$ quantidade, em ml, de líquido vertido por embalagem$\sim N(\mu,\ 0.08^2)$

$$P(|\bar{X}-\mu| < 0.05) = P(-0.05 < \bar{X}-\mu < 0.05) = P\left(\frac{-0.05}{\frac{0.08}{\sqrt{25}}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{0.05}{\frac{0.08}{\sqrt{25}}}\right)$$

$$= P(-3.125 < Z < 1.325) = normcfd(-3.125, 3.125, 0,1)$$

=0.999111- 0.000889=0.998222

b) Se a quantidade média de liquído vertido por embalagem pela máquina for igual a 12ml, qual a probabilidade de a garrafa com menos liquído na amostra conter menos de 10 ml?

$$P(min\{X_i\} < 10) = G_{(1)}(10) = 1 - [1 - F_X(10)]^{25} \approx 0$$

4. Seja X uma variável aleatória com função distribuição:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Classifique, justificando devidamente, a variável aleatória X.

$\lim\limits_{x \to 0^-} F_X(x) = 0;$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} F_X(x) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $F_X(x)$ tem um ponto de descontinuidade em $x = 0$

$$D_X = \{0\} \neq \emptyset$$

$P(X = 0) = F_X(0) - F_X(0^-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow X$ é uma variável aleatória mista

5. Sejam X e Y v.a.(s) discretas e independentes com funções probabilidade dadas por:

X	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Y	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

a) Calcule a $P(X+Y=4)$.

$$P(X+Y=4)=f_{X,Y}(1{,}3)+f_{X,Y}(2{,}2)+f_{X,Y}(3{,}1)$$

Como X e Y v.a.(s) independentes $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)*f_Y(y)\ \forall(x,y)\in D_{X,Y}$. Então:

$$P(X+Y=4)=f_{X,Y}(1{,}3)+f_{X,Y}(2{,}2)+f_{X,Y}(3{,}1)=f_X(1)*f_Y(3)+f_X(2)*f_Y(2)+f_X(3)*f_Y(1)$$

$$=\frac{1}{3}*\frac{1}{6}+\frac{1}{2}*\frac{1}{6}+\frac{1}{6}*\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$$

b) Calcule a $P(X\leq 2|X+Y=4)$.

$$P(X\leq 2|X+Y=4)=\frac{P(X\leq 2\cap X+Y=4)}{P(X+Y=4)}=\frac{f_{X,Y}(1{,}3)+f_{X,Y}(2{,}2)}{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{f_{X,Y}(1{,}3)+f_{X,Y}(2{,}2)}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{3}*\frac{1}{6}+\frac{1}{2}*\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{5/36}{1/4}=\frac{5}{9}$$

6. Como não pôde sair de casa durante o estado de emergência, uma noite decidiu encomendar o jantar a um restaurante que lhe trouxesse o jantar até casa. Por acordo, entre todos os membros da família ficou decidido que a escolha seria entre Sushi da NOORI e Pizza da PIZZA HUT. A probabilidade de a escolha recair sobre a 1ª opção é de $\frac{2}{3}$ porque em casa são mais os que preferem sushi a pizza. O tempo desde a encomenda até à chegada da comida a casa é exponencialmente distribuído com média 15 no caso da NOORI e média 10 no caso da PIZZA HUT. Sabendo que já está à espera da comida há mais de 25 minutos após a encomenda, qual a probabilidade de que tenha encomendado sushi da NOORI?
A_1 − NOORI; A_2 − PIZZA HUT; B − estar à espera da comida há mais de 25 minutos
X − O tempo desde a encomenda à NOORI até à chegada da comida a casa$\sim Exp\left(\frac{1}{15}\right)$
Y − O tempo desde a encomenda à PIZZA HUT até à chegada da comida a casa$\sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$
$P(A_1)=\frac{2}{3};\ P(A_2)=1-P(A_1)=\frac{1}{3}\ ;\ P(B|A_1)=P(X>25);\ P(B|A_2)=P(Y>25)$

$P(B|A_1)=P(X>25)=e^{-\frac{25}{15}}$ =0.188876; $P(B|A_2)=P(Y>25)=e^{-\frac{25}{10}}$ =0.082085

Pelo teorema de Bayes, tem-se:

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)*P(A_1)}{P(B|A_1)*P(A_1)+P(B|A_2)*P(A_2)}=\frac{0.1259}{0.1533}=0.8215$$

7. Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com função densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)} \quad (x > 0, \qquad y > 0)$$

Determine a função distribuição da v.a. $Z = \frac{X}{Y}$.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = P(X \leq Yz) = \int_0^{+\infty} \int_0^{yz} e^{-(x+y)} dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} \int_0^{yz} e^{-x} dxdy = \int_0^{+\infty} e^{-y} -e^{-x}\Big]_0^{yz} dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(1 - e^{-zy}\right) dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} - e^{-y-zy} dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} - e^{-y(1+z)} dy$$

$$= -e^{-y}\Big]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-y(1+z)}}{1+z}\right]_0^{+\infty} = 1 - \frac{1}{1+z} = \frac{z}{1+z}$$